Fiche 1 – Représentation des nombres en machine

Exercice 1.

1. Montrer que, en base 10, on a $1 = 0,\underline{9}$.
2. Montrer que, pour toute base β, si $b = \beta - 1$, on a $1 = 0,\underline{b}$.

Exercice 2.

1. Calculer le développement décimal de $\dfrac{201}{700}$.
2. Écrire sous la forme d'une fraction rationnelle le nombre $0,\underline{123}$.
3. Soit q un entier strictement positif qui s'écrit avec s chiffres en base 10, $q = \overline{q_1 q_2 \cdots q_s}$, et soit x le nombre dont l'écriture en base 10 est $x = 0,\underline{q_1 q_2 \cdots q_s}$. Montrer que
$$x = \frac{\overline{q_1 q_2 \cdots q_s}}{10^s - 1} = \frac{q}{10^s - 1}.$$
4. Soient p un entier positif écrit en base 10 avec r chiffres et q un entier strictement positif écrit en base 10 avec s chiffres : $p = \overline{p_1 p_2 \cdots p_r}$, $q = \overline{q_1 q_2 \cdots q_s}$. On considère alors le nombre y dont l'écriture en base 10 est $y = 0, p_1 p_2 \cdots p_r \underline{q_1 q_2 \cdots q_s}$. Montrer que
$$y = \frac{\overline{p_1 p_2 \cdots p_r q_1 q_2 \cdots q_s} - \overline{p_1 p_2 \cdots p_r}}{10^r(10^s - 1)}.$$
5. Quel résultat du cours a-t-on démontré ?
6. En déduire la forme rationnelle du nombre $x = 0,43565\underline{123}$.
7. Déterminer, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, toutes les décimales de $u_k = \dfrac{1}{10^k - 1}$.

Exercice 3. On considère un ordinateur codant sur 32 bits les nombres à virgule flottante, *i.e.* en « simple précision ». En admettant que 8 bits sont réservés au codage de l'exposant, déterminer pour cet ordinateur :

– son ensemble $\mathcal{F}(\beta, r, m, M)$ des nombres connus,

– sa « capacité machine » (*i.e.* le nombre au-delà duquel l'ordinateur indique `overflow`),

– sa précision machine ε.

Exercice 4. On rappelle que l'ensemble des « flottants jouets de Forsythe » est l'ensemble des nombres à virgule flottante de la forme

$$x = \pm\, \overline{0, d_{-1}d_{-2}\cdots d_{-r}} \cdot \beta^j$$

avec $\beta = 2$, $r = 3$ et $-1 \leq j \leq 2$. On le note $\mathcal{F}(2, 3, -1, 2)$, ou plus simplement dans cet exercice $\mathcal{F}$, et on suppose qu'un ordinateur fasse ses calculs sur $\mathcal{F}$. On rappelle aussi qu'une procédure d'arrondi A est alors associée à cet ensemble de la façon suivante :

- A est définie sur $\mathbb{R}$ et laisse $\mathcal{F}$ invariant,
- si x est plus grand en valeur absolue que le plus grand flottant, $A(x) =$ `'overflow'`,
- sinon, soit $[f, f']$ le plus petit intervalle contenant x et dont les extrémités sont des flottants ; alors $A(x)$ est égal à celui des nombres f ou f' qui est le plus proche de x (en cas d'équidistance, on prendra f).

Toute opération élémentaire nécessite alors le passage par la procédure d'arrondi. On définit par exemple sur $\mathcal{F}$ l'addition $\oplus$ et la multiplication $\otimes$, par $f \oplus f' = A(f + f')$ et $f \otimes f' = A(ff')$, pour tous $f, f' \in \mathcal{F}$.

1. Donner les valeurs de $A(2.5)$, $A(-4)$, $A(-1.25)$ et $A(1/3)$.
2. Calculer $\frac{5}{16} \ominus \frac{7}{16}$, $\frac{5}{2} \otimes 3$ et $\frac{1}{4} \otimes \frac{3}{8}$.
3. Calculer $\left(\frac{5}{16} \otimes 3\right) \otimes \frac{7}{8}$ et $\frac{5}{16} \otimes \left(3 \otimes \frac{7}{8}\right)$. Que constate-t-on ?

Exercice 5. Comme dans l'exercice précédent, on considère l'ensemble de flottants théorique $\mathcal{F}(\beta, r, m, M)$, la même procédure d'arrondi A sur cet ensemble, et l'addition $\oplus$ définie sur $\mathcal{F}(\beta, r, m, M)$ par $f \oplus f' = A(f + f')$.
Pour $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs donnée, on définit $\Sigma_0 = A(u_0)$ et, pour tout $n \geq 1$,

$$\Sigma_n = \Sigma_{n-1} \oplus A(u_n) = A(\Sigma_{n-1} + A(u_n)).$$

C'est donc la réalisation de la série numérique de terme général u_n.

1. Montrer que si u_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini, et si les sommes Σ_n restent en dessous du niveau d'overflow, alors la suite des Σ_n est stationnaire à partir d'un certain rang.
2. On pose $u_n = 1/n$. Montrer que la série associée $\sum u_n$ est divergente. On l'appelle « série harmonique » (cf. M33 pour une étude plus poussée de cette série).
3. Montrer que, pour $n > \beta^r$, la suite des sommes partielles flottantes de la série harmonique est stationnaire. Majorer la somme partielle ainsi obtenue.
4. Calculer la somme de la série harmonique en travaillant dans $\mathcal{F}(10, 3, -3, 5)$ et dans $\mathcal{F}(10, 5, -5, 5)$. On atteindra le moment où la suite des Σ_n est stationnaire.