TD1 : NORMES MATRICIELLES

Exercice 1. Soient A, B des matrices de taille appropriée. Montrer les propriétés suivantes ou trouver les contre–exemples :

(a) A, B symétriques $\Longrightarrow A \cdot B$ symétrique.
(b) A, B orthogonales $\Longrightarrow A \cdot B$ orthogonale.
(c) dét $(A^{-1}) = 1/$dét A.
(d) $A + A^T$ est symétrique.
(e) $A \cdot B = 0 \Longrightarrow A = 0$ ou $B = 0$.
(f) $A \cdot B = 0 \Longrightarrow B \cdot A = 0$.
(g) A, B diagonales $\Longrightarrow A \cdot B = B \cdot A$.
(h) Le déterminant d'une matrice triangulaire A se calcule en prenant le produit des éléments sur la diagonale.
(i) Toute matrice de rang 1 peut s'écrire comme $A = xy^H$ avec x, y des vecteurs de taille appropriée.
(j) Toute matrice carrée admet au moins un élément propre.
(k) Toute matrice est diagonalisable par un changement de base (i.e., il existe un S inversible t.q. $S^{-1}AS$ est une matrice diagonale.)

Exercice 2. Montrer que $\|A\| = \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq k \leq n}} |A_{j,k}|$ est une norme matricielle sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, sous-multiplicative, compatible avec les normes vectorielles $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_1$. Est-elle une norme subordonnée ? Même question pour $\|A\| = m. \max_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq k \leq n}} |A_{j,k}|$.

Exercice 3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible. Montrer que $\|x\|_M = \|M.x\|$ est une norme sur $\mathbb{K}^n$. Déduire la formule $\|A\|_M = \|MAM^{-1}\|$ pour la norme matricielle subordonnée.

Exercice 4. Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Montrer que

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\|A\|_2.$$

Exercice 5. Soient $1 < p < \infty$ et q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Vérifier que pour $x \in \mathbb{K}^n$, $y \in \mathbb{K}^n$,

$$\|x.y^H\|_p = \|x\|_p.\|y\|_q.$$

Exercice 6. Soit B une sous-matrice d'une matrice A. Montrer que $\|B\|_p \leq \|A\|_p$.

Exercice 7. *Devoir maison.*

(a) Montrer que pour tout x, $y \in \mathbb{K}^n$,
$$|x^H.y| \leq \|x\|_1 \|y\|_\infty.$$

(b) Montrer que pour tout x, $y \in \mathbb{K}^n$,
$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p, \qquad p \in \{1, \infty\}.$$

Exercice 8. Montrer que $\|A\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ est une norme sur $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ qui est sous-multiplicative et compatible avec $\|.\|$.

Exercice 9. Montrer que pour tout $1 \leq p \leq p' \leq \infty$ et pour tout $x \in \mathbb{K}^n$,
$$\|x\|_{p'} \leq \|x\|_p \leq n^{1/p - 1/p'} \|x\|_{p'}.$$
Indication : On supposera dans un premier temps que $p = 1$: ici pour l'inégalité à gauche on pourrait se servir du fait que $(1 + h^r)^{1/r} \leq 1 + h$ pour $h \in [0, 1], r \geq 1$ (preuve par exemple par TAF), et l'inégalité à droite découle du cours. Pour discuter le cas $p > 1$ il est utile de considérer l'inégalité pour $p = 1$ appliquée au vecteur $y = (|x_1|^p, ..., |x_n|^p)^T$.

Exercice 10. Soit $\|.\|$ une norme vectorielle quelconque sur $\mathbb{R}^n$ et $\beta = \max_{1 \leq j \leq n} \|e_j\|$.

(a) Vérifier que $\|x\| \leq \beta.\|x\|_1$. pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

(b) Soit $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $\|.\|_1$. Montrer que $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|$ est continue.

(c) En se servant du théorème de Weierstraß, déduire qu'il existe $0 < \alpha < \beta$ tels que
$$\alpha \|x\|_1 \leq \|x\| \leq \beta \|x\|_1.$$

Exercice 11. Soient p, $p' \in [1, \infty]$, $p < p'$ et $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Montrer que
$$\|A\|_p \leq m^{1/p - 1/p'}.\|A\|_{p'} \text{ et } \|A\|_{p'} \leq n^{1/p - 1/p'}.\|A\|_p.$$