TD4 FACTORISATIONS QR : MÉTHODES DE HOUSEHOLDER ET DE GIVENS, PROBLÈMES DES MOINDRES CARRÉS

Exercice 1.

Calculer une droite de régression passant par les trois points

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Exercice 2. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible.

1. Montrer qu'il existe une matrice R triangulaire supérieure à diagonale strictement positive telle que $A^tA = R^tR$.
2. En déduire qu'il existe une matrice orthogonale Q telle que $A = Q\,R$.
3. Montrer que cette décomposition $A = QR$ avec R triangulaire supérieure à diagonale strictement positive et Q orthogonale est unique.
4. `[Scilab]` étant donnée les matrices `Q` et `R`, écrire une commande qui vérifie que `Q` est orthogonale et que `R` est triangulaire supérieure à diagonale strictement positive.

Exercice 3.

Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$ et $w \in \mathbb{R}^m$ tel que $w_i > 0$ pour tout $1 \leq i \leq m$. On considère la matrice diagonale D telle que $D = diag(w)$. Ecrire à l'aide des matrices A, D, b le système des équations normales pour le problème

$$\inf_x \left[\sum_{i=1}^{m} w_i \left(\sum_{j=1}^{n} A_{i,j}x_j - b_i \right)^2 \right].$$

Exercice 4.

Soient $1 \leq i,\ j \leq n$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On définit une matrice de rotation de Givens par

$$G = G(i,j,\theta) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & \cos\theta & \dots & -\sin\theta & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & \sin\theta & \dots & \cos\theta & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & \dots & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

On pose $c = \cos\theta, s = \sin\theta$, on a donc $G_{ii} = G_{jj} = c$, $G_{ij} = -G_{ji} = -s$.

1. Montrer que G est une matrice orthogonale.
2. Préciser le résultat de l'opération $G(i,j,\theta)A$, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Considérons la sous-matrice $\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ avec $c^2+s^2=1$. Etant donné $(\alpha,\beta)^T \in \mathbb{R}^2$, comment choisir c et s de façon à ce que
$$\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}, r>0?$$
4. On considère la matrice suivante
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$
Réduire A à la forme
$$R = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
en utilisant les matrices de Givens. En déduire la décomposition QR de A.
5. On considère une matrice (carrée) de type Hessenberg supérieure. On rappelle qu'une telle matrice a ses coefficients en-dessous de la première sous-diagonale tous nuls. Calculer la complexité de la factorisation QR d'une matrice de type Hessenberg.

Exercice 5.

1. Soient x et y deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que $\|x\| = \|y\|$. Déterminer une matrice de Householder telle que
$$H(v)x = y.$$
Suggestion : penser à utiliser le vecteur $x-y$.
2. Pourquoi une matrice orthogonale et triangulaire supérieure est-elle forcément diagonale ? En appliquantune décomposition QR, démontrer que toute matrice orthogonale est le produit d'au plus n matrices de Householder. En déduire une interprétation géométrique des matrices orthogonales.

Exercice 6.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice hermitienne semi définie positive (resp. définie positive). Montrer qu'il existe une matrice hermitienne semi définie positive (resp. définie positive) B telle que $B^2 = A$.
2. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible, il existe une unique matrice hermitienne positive H et une unique matrice unitaire U telles que $A = UH$.

Exercice 7.

On considère dans le plan xOy un ensemble de $m \geq 3$ points P_i de coordonnées (x_i, y_i) pour $i \in \{1,\dots,m\}$. Dans les trois cas suivants, on cherche à déterminer la droite qui passe au mieux par les points P_i.

1. Le cas $\inf_{a,b} \sum_{i=1}^{m} |y_i - ax_i - b|^2$: Ecrire les équations qui caractérisent la solution $(\overline{a}, \overline{b})$.
2. Le cas $\inf_{c,d} \sum_{i=1}^{m} |x_i - cy_i - d|^2$: Ecrire les équations qui caractérisent la solution $(\overline{c}, \overline{d})$.
3. Le cas $\inf_{e,f,g} \sum_{i=1}^{m} \frac{|ex_i + fy_i + g|^2}{e^2 + f^2}$, en remarquant que $ex + fy + g = 0$ est l'équation d'une droite Δ et que la distance (euclidienne) d'un point P_i à la droite Δ est donnée par
$$d^2(P_i, \Delta) = \frac{|ex_i + fy_i + g|^2}{e^2 + f^2}.$$
Déduire que l'on trouve le meilleur g pour e, f donné par un problème de moindres carrés, et que l'on trouve la droite optimale en calculant un vecteur propre d'une matrice 2×2 à préciser.
4. Prenez 3 points non alignés du $\mathbb{R}^2$ et tracer les trois droites ainsi que les distances a minimiser.

Exercice 8.

Soit A une matrice carrée réelle de taille n.

1. Déterminer $H_2 = I - 2u_2\, u_2^t$ où $u_2 \in \mathbb{R}^n$ avec $(u_2)_1 = 0$ afin que la matrice $B = H_2^t A H_2$ soit telle que $b_{i,1} = 0$ pour $i \geq 3$.
2. Montrer comment déterminer les matrices élémentaires de Householder H_k pour $2 \leq k \leq n-1$ où $H_k = I - 2u_k\, u_k^t$, u_k ayant ses $k-1$ premières composantes nulles, telles que la matrice $H_{n-1}^T H_{n-2}^T \dots H_2^T A H_2 \dots H_n$ soit une matrice de Hessenberg supérieure.
3. Quelle particularité obtient-on si A est symétrique ?
4. Soient H_i les matrices définies dans la question précédente. Pour calculer la matrice $Q = H_1 H_2 \dots H_n$, on peut effectuer les produits de gauche à droite dans l'ordre $H_1 H_2$, $(H_1 H_2) H_3, \dots, (H_1 \dots H_{n-1}) H_n$, ou bien de droite à gauche dans l'ordre $H_{n-1} H_n, H_{n-2}(H_{n-1} H_n), \dots, H_1(H_2 \dots H_n)$. Compter le nombre minimum d'opérations nécessaires dans l'un et l'autre cas. Conclure.