TD5 Valeurs propres et vecteurs propres

Exercice 1. *Valeurs propres : remise en jambe.*

Soient $n, p \in \mathbb{N}^\star$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que AB et BA ont les mêmes valeurs propres non nulles.
2. On suppose $n \le p$. Montrer que si 0 est valeur propre de AB, alors 0 est valeur propre de BA. En déduire que si $p = n$, alors AB et BA ont mêmes valeurs propres.
3. Qu'en est-il lorsque $n \neq p$?

Exercice 2. *Théorème de Gerschgorin.*

1. Démontrer le théorème de *Gerschgorin* (1931) : Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, on introduit le i-ème disque de Gerschgorin :

$$D_i := \left\{ z \in \mathbb{C},\ |A_{ii} - z| \le \sum_{j \neq i} |A_{i,j}| \right\}.$$

   Alors, toute valeur propre de A appartient à au moins un des disques de Gerschgorin.

   Indication : en raisonnant par l'absurde, montrer que sinon il existe une valeur propre λ de A de sorte que $(\lambda I - D)^{-1}(A - D)$ est de norme < 1, avec $D = \mathrm{diag}(A_{11}, \cdots, A_{nn})$.

2. Exprimer les informations ainsi obtenues pour la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

3. Montrer que la matrice B est définie positive :

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Exercice 3. *Méthode de la puissance : quelques calculs explicites.*

Dans cet exercice, on utilisera la norme $\| \cdot \|_\infty$.

1. On note

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ -9 & 1 \end{bmatrix}.$$

   a) Calculer les éléments propres de A.

b) Calculer la suite (q_k) d'approximations d'un vecteur propre de A, construite par la méthode de la puissance :

$$q_k = z_k / \parallel z_k \parallel, \quad z_{k+1} = A q_k$$

en partant de $z_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. On note

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Calculer les valeurs propres de B.

b) Calculer la suite (q_k) d'approximations d'un vecteur propre de B, construite par la méthode de la puissance en partant de $z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Expliquer.

3. On note

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ non nul.

a) Calculer la suite (q_k) d'approximations d'un vecteur propre de C, construite par la méthode de la puissance en partant de $z_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

b) À quelle condition existe-t-il une sous-suite de (q_k) convergeant vers un vecteur propre de C ?

4. On considère maintenant

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Montrer qu'en partant de $z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$ avec $0 < y < 1$ la suite générée par la méthode de la puissance converge vers le vecteur propre $z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ mais avec une vitesse $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$

Exercice 4. *Méthode de la puissance : matrice normale, cas général.*

Dans cet exercice, on utilisera la norme euclidienne $\| \cdot \|_2$.

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle et $(e_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une base orthonormée de vecteurs propres de A associés aux valeurs propres $(\lambda_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in \mathbb{C}^n$. Sans perdre de généralité, on supposera qu'il existe $k_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que

$$\rho(A) = |\lambda_1| = \cdots = |\lambda_{k_0}| > |\lambda_{k_0+1}| \geq \cdots \geq |\lambda_n| .$$

On introduit alors la projection

$$\Pi : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \to & \mathbb{C}^n \\ \sum_{i=1}^n x_i \, e_i & \mapsto & \sum_{i=1}^{k_0} x_i \, e_i \end{array} .$$

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\|z\|^2 = \|\Pi(z)\|^2 + \|(I - \Pi)(z)\|^2$$

2. Montrer que si $z \in \mathbb{C}^n$ est tel que $\Pi z \neq 0$, alors $\Pi A z \neq 0$ et donc $Az \neq 0$.

3. Soit $x_0 \in \mathbb{C}^n$ tel que $\Pi x_0 \neq 0$. De la question précédente il suit que l'on peut définir par récurrence une suite (z_k) vérifiant

$$z_0 \;=\; \frac{x_0}{\|x_0\|} \qquad \text{et, pour tout } k \in \mathbb{N}, \quad z_{k+1} \;=\; \frac{A\, z_k}{\|A\, z_k\|}\ .$$

   a) Vérifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $z_k = \frac{A^k x_0}{\|A^k x_0\|}$.

   b) Montrer que $\frac{\|A^k x_0\|}{\rho\,(A)^k} \to \|\Pi x_0\|$ quand $k \to \infty$.

   c) Montrer que $(\mathbf{I}_n - \Pi)\, z_k \to 0$ quand $k \to \infty$.

   d) Montrer que $\|Az_k\| \to \rho\,(A)$ quand $k \to \infty$.

   e) Que peut-on dire sur la convergence de $(z_k)_k$ et de $(z_{2k})_k$ quand A est hermitienne ? Et dans le cas où $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{k_0}$?

Exercice 5. *Méthode QR.*

Soit

$$A \;=\; \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}\ .$$

avec a, b deux nombres réels et posons $\Delta = a^2 + b^2$.

1. Montrer que toutes les matrices A_k obtenues par la méthode QR avec shift sont symétriques, ont la même trace et le même déterminant que A. En déduire que

$$A_k \;=\; \begin{bmatrix} a_k & b_k \\ b_k & -a_k \end{bmatrix}\ .$$

   avec $\Delta = a_k^2 + b_k^2$.

2. Dans le cas d'un shift $\mu_k = 0$ étudier la convergence de la suite (A_k).

3. Dans le cas d'un shift $\mu_k = -a_k$, étudier la convergence de (A_k)

Exercice 6. Notons l'image numérique d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$W(A) = \{R_A(x) : \quad x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}\}$$

1. Montrer que $\mathrm{sp}(A) \subset W(A)$.

2. Montrer que $W(A) \subset \{z \in \mathbb{C} : \quad |z| \leq \| A \|\}$.

3. Montrer que si A est normale alors $W(A)$ est l'enveloppe convexe de $\mathrm{sp}(A)$. En particulier si A est hermitienne, $W(A) = [\lambda_{\min}(A), \lambda_{\max}(A)]$.

Exercice 7. *Autour de la méthode de la puissance*

Soit A une matrice réelle de taille n admettant une base de vecteurs propres $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$

1. Supposons que les valeurs propres vérifient $\lambda_1 = -\lambda_2$, $|\lambda_2| > |\lambda_3| \geq |\lambda_4| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$ Soit x_0 un vecteur vérifiant $u_1^H x_0 \neq 0$ avec u_1 vecteur propre à gauche associé à la valeur propre λ_1, et y un vecteur vérifiant $v_1^H y \neq 0$. Montrer que si (x_k) est la suite de vecteurs obtenue par la méthode de la puissance,
$$\frac{y^H x_{2k+2}}{y^H x_{2k}} = \lambda_1^2 + \mathcal{O}\left(\left|\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right|^{2k}\right)_{k\to\infty}.$$
2. Supposons maintenant que les valeurs propres dominantes sont complexes conjuguées, $\lambda_1 = \overline{\lambda}_2$. Calculer le rapport
$$s_k = \begin{vmatrix} y^H x_{k+1} & y^H x_{k+2} \\ y^H x_{k+2} & y^H x_{k+3} \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} y^H x_k & y^H x_{k+1} \\ y^H x_{k+1} & y^H x_{k+2} \end{vmatrix}$$
et montrer que
$$s_k = \lambda_1\lambda_2\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^k\right).$$
En déduire comment calculer λ_1.
3. <u>La déflation</u> : c'est une méthode qui permet de calculer les autres valeurs propres de A si $|\lambda_2| > |\lambda_3| > \cdots > |\lambda_n|$. et vecteurs propres correspondants en utilisant la méthode de la puissance.
   a) Soit (λ_1, x_1) les éléments propres dominants de A. Déterminer une matrice B de taille $n-1$ ayant comme valeurs propres $\lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_n$.
   b) Soit z_2 le vecteur propre de B associé à la valeur propre λ_2. Comment calculer x_2 tel que $Ax_2 = \lambda_2 x_2$?
   c) En déduire une procédure pour le calcul de tous les éléments propres de A.
4. <u>Méthode de la puissance inverse.</u>

   Soit λ une valeur propre de A. On considère $\tilde{\lambda}$ une valeur vérifiant
$$\tilde{\lambda} \neq \lambda, \quad \left|\tilde{\lambda} - \lambda\right| < \left|\tilde{\lambda} - \mu\right| \quad \forall \mu \in \mathrm{sp}(A) \setminus \{\lambda\}$$
   et un vecteur u_0 qui n'est pas contenu dans le sous–espace engendré par les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres différentes de λ.

   On considère la suite u_k engendrée par la méthode itérative suivante
$$(A - \tilde{\lambda}I)u_{k+1} = u_k \quad k \geq 0.$$
   Montrer que
$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{(\lambda - \tilde{\lambda})^k}{\left|\lambda - \tilde{\lambda}\right|^k}\frac{u_k}{\| u_k \|}\right) = q$$
   où q est un vecteur propre correspondant à la valeur propre λ.

   Dans le cas où λ et $\tilde{\lambda}$ sont réels, comment conclure si l'approximation est par défaut ou par excès ?